Формулы сложения, формулы двойного угла и половинного угла. Формулы суммы и разности одноименных тригонометрических функций

1) Формулы сложения:

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$
$tg(\alpha\pm\beta)=\dfrac{tg\,\alpha\pm tg\,\beta}{1\mp tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}$

Формулы двойного угла:

$\boxed{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$ $\boxed{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$ $\boxed{tg\,2\alpha=\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}}$

Формулы половинного угла:

$1+\cos\alpha=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$	$1-\cos\alpha=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$

$$tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)}{\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$\boxed{tg\,\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}}$ или $\boxed{tg\,\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}}$

Решение примеров:

1) Вычислить: $\cos 43^\circ\cdot\cos 17^\circ-\sin 43^\circ\cdot\sin 17^\circ$.

Применяем формулу $\cos(\alpha+\beta)$

и тогда $\cos 43^\circ\cdot\cos 17^\circ-\sin 43^\circ\cdot\sin 17^\circ=\cos\left(43^\circ+17^\circ\right)=\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$

Аналогично: $\sin 57^\circ\cdot\cos 12^\circ-\cos 57^\circ\cdot\sin 12^\circ=\sin\left(57^\circ-12^\circ\right)=\sin 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2) Доказать: $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)+2\cos a\cdot\sin\beta}{2\cos\alpha\cdot\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)}=tg(\alpha+\beta)$

Действительно: $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)+2\cos a\cdot\sin\beta}{2\cos\alpha\cdot\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)}=\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta+2\cos\alpha\cdot\sin\beta}{2\cos\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}=$

(использовали формулы $\sin(\alpha-\beta)$ и $\cos(\alpha-\beta)$)

$$=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=tg(\alpha+\beta)$$

3) Доказать: $\sin 2\alpha\cdot\cos^3 2\alpha-\sin^3 2\alpha\cdot\cos 2\alpha=\dfrac{1}{4}\sin 8\alpha$

$$\sin 2\alpha \cdot \cos^3 2\alpha - \sin^3 2\alpha \cdot \cos 2\alpha = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha \left(\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha\right) = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha = \frac{1}{2} \cdot \sin 4\alpha \cdot \cos 4\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\sin 4\alpha \cdot \cos 4\alpha = \frac{1}{4}\sin 8\alpha$$

при решении использованы формулы $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$; $\quad 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin 2\alpha$

4) Дано: $\sin\alpha = \frac{3}{5} \quad 90^\circ < \alpha < 180^\circ$

$\cos\beta = -\frac{3}{4} \quad 180^\circ < \beta < 270^\circ$

Найти: $\sin(\alpha+\beta)$; $\cos(\alpha+\beta)$

Решение:

Запишем формулы:

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}$$

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

Видим, что надо найти функции $\cos\alpha$ и $\sin\beta$. Используя, что $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ имеем

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

$\cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$; $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, т.к. $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ (II четверть)

Аналогично: $\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta$

$\sin^2\beta = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$; $\sin\beta = -\frac{\sqrt{7}}{4}$, т.к. $180^\circ < \beta < 270^\circ$ (III четверть)

и тогда:

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = -\frac{9}{20} + \frac{4\sqrt{7}}{20} = -\frac{9+4\sqrt{7}}{20}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) - \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \frac{12}{20} + \frac{3\sqrt{7}}{20} = \frac{12+3\sqrt{7}}{20}$$

Формулы суммы и разности одноименных тригонометрических функций.

$$\boxed{\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\boxed{\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\boxed{\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{a-\beta}{2}}$$

$$\boxed{\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\boxed{tg\alpha \pm tg\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}$$

$$\boxed{ctg\,\alpha + ctg\,\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}}$$

$$\boxed{ctg\,\alpha - ctg\,\beta = -\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}}$$

Например:

$$1)\sin 3\alpha+\sin 5\alpha=2\sin\frac{3\alpha+5\alpha}{2}\cdot\cos\frac{3\alpha-5\alpha}{2}=2\sin 4\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$2)\frac{1+\cos(\alpha-\beta)}{1-\cos(\alpha-\beta)}=\frac{2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}}=ctg^2\frac{\alpha-\beta}{2}\qquad 3)\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}=ctg\alpha\cdot ctg\beta$$

Преобразовать в сумму или разность:

$$\sin 15^\circ\cdot\cos 75^\circ=\frac{1}{2}\left(\sin 90^\circ-\sin 60^\circ\right)\qquad \cos 2x\cdot\cos 6x=\frac{1}{2}\left(\cos 8x+\cos 4x\right)$$

$$\sin 7\alpha\cdot\cos 3\alpha=\frac{1}{2}\left(\sin 10\alpha+\sin 4\alpha\right)\qquad \sin 5\beta\cdot\sin 2\beta=-\frac{1}{2}\left(\cos 7\beta-\cos 3\beta\right)$$

Самостоятельно:

$$1)tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)-tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=2tg\alpha$$

$$2)\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}=tg3\alpha$$

3) Преобразовать в сумму или разность функций

$$\sin 6\alpha\cdot\cos 9\alpha=\frac{1}{2}\left(\sin 15\alpha-\sin 3\alpha\right);\qquad \cos 4\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}\left(\cos 5\alpha+\cos 3\alpha\right)$$

Решить самостоятельно:

1°. а) $\sin 113^\circ\cos 67^\circ+\sin 67^\circ\cos 113^\circ$;

б) $\cos 74^\circ\cos 29^\circ+\sin 74^\circ\cos 61^\circ$.

2°. $5\cos^2 3\alpha\ \mathrm{tg}\,3\alpha$.

3. $\sin\alpha=0{,}8,\ \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

4. $\dfrac{\sin(x+45^\circ)+\sin(x-45^\circ)}{\sin(x+45^\circ)-\sin(x-45^\circ)}$.

5. $\cos\alpha=\frac{2}{3},\ 270^\circ<\alpha<360^\circ$,

$\sin\beta=\frac{1}{3},\ 90^\circ<\beta<180^\circ$.

Найти $\sin(2\alpha+\beta)$.